*Olav Gravir Imenes, Trude Sundtjønn, Reinert A. Rinvold,
Kristin Ran Choi Hinna og Trond Stølen Gustavsen*

QED 5–10: Tall og tallteori, fasit

Matematikk for grunnskolelærerutdanningen

CAPPELEN DAMM AKADEMISK

Innhold

Tall

1.2
1984

1.3
Addisjon MXXXVI. Multiplikasjon CCLIXCVIII

1.4
μy, 9

1.9
a) $2 \cdot 10 + 3 \cdot 1$ **b)** $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1$

c) $3 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 2 \cdot 1$ **d)** $4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1$

1.10
a) 1_{fire}, 2_{fire}, 3_{fire}, 10_{fire}, 11_{fire}, 12_{fire}, 13_{fire}, 20_{fire}, 21_{fire}, 22_{fire}, 23_{fire}, 30_{fire}, 31_{fire}, 32_{fire}, 33_{fire}, 100_{fire}, 101_{fire}, 102_{fire}, 103_{fire}, 110_{fire}, 111_{fire}, 112_{fire}, 113_{fire}, 120_{fire}

b) 1_{tolv}, 2_{tolv}, 3_{tolv}, 4_{tolv}, 5_{tolv}, 6_{tolv}, 7_{tolv}, 8_{tolv}, 9_{tolv}, A_{tolv}, B_{tolv}, 10_{tolv}, 11_{tolv}, 12_{tolv}, 13_{tolv}, 14_{tolv}, 15_{tolv}, 16_{tolv}, 17_{tolv}, 18_{tolv}, 19_{tolv}, 1A_{tolv}, 1B_{tolv}, 20_{tolv}

1.11
-3_{sju}, -1_{sju}, 2_{sju}, 4_{sju}, 6_{sju}, 14_{sju}, 21_{sju}

1.12
a) 434 **b)** 16 201 **c)** 6640 **d)** 46 **e)** 46

1.13
```
# Skriv heltall på utvidet form
print("Hvilket positivt heltall vil du skrive på utvidet form?")
tall = input()

lengde = len(tall)  #trenger å vite lengden på det positive heltallet.
                    len() måler hvor lang en tekststreng er

print("Det positive heltallet {} kan skrives som summen av følgende tall:"\\
    .format(tall))
for i in range(lengde):
    print(tall[i], "* 10 ^",(lengde - i - 1))

#i programmet har vi ikke jobba med heltallet som tall, men som tekststreng.
#prøv for eksempel å skrive inn ordet TALL. Hva skjer?
#om du prøver med TALL ser du at programmet ikke jobber matematisk, men med en
tekststreng.
```

1.14

a) 10_{fem} b) 100_{fem} c) 101_{fem} d) 400_{fem}

1.15

a) 100_{to} b) 1000_{to} c) $10\,000_{\text{to}}$ d) 1111_{to} e) $1\,000\,000_{\text{to}}$

1.16

Det er ingen direkte kommando for å komme til andre baser enn 2, 8, 16 innebygd i Python.
Et mulig program er:

```python
#skal man gå fra titallsystemet til femtallsystemet kan vi skrive dette programmet hvor tall er det du ønsker å konvertere fra titallsystemet

def fra_ti_til_base(tall, base):
    rest = ' '
    while tall > 0:
        rest = str(tall % base) + rest
        tall = tall // base # // betyr at vi gjør heltallsdivisjon med rest
        # og tar med oss resultatet uten rest videre
    if rest: return rest
    return '0'

print("hvilket tall ønsker du å konvertere til base 5?")

tall = int(input()) #her fortelles hvilket tall som skal konverteres fra titallsystemet.
#int() gjør at python skjønner det er et heltall, ikke tekst eller flyttall.
base = 5

print(tall, "i valgte base", base, "er", fra_ti_til_base(tall,base))
# hva kunne du endret for å at dette skal virke for andre tallsystem enn base 5?

#Ekstratips utover oppgaven i boka
#skal vi gå fra femtallsystemet til titallsystemet kan vi skrive denne kommandoen
#hvilket tall c er du interessert i aa konvertere?

print("hvilket tall i femtallsystemet ønsker du å konvertere til base 10?")
c = input() #her defineres c. Python vet ikke at dette er et tall

#int(c, base=5) forteller python at man er i base 5, og at c skal regnes om til titallsystemet.

print(c, "i femtallsystemet er", int(c, base=5), "i titallsystemet")
```

1.17

a) $4D2_{\text{seksten}}$ b) 17_{seksten} c) 40_{seksten} d) 400_{seksten} e) 401_{seksten}

KAPITTEL

2

Regneartene

2.3

1500

2.7

a) 202_{fem} b) 143_{fem} c) 110_{fem} d) 110_{fem} e) 333_{fem}

2.8

a) 1110_{tre} b) 1110_{tre} c) 210_{tre} d) 1221_{tre} e) $11\,211_{\text{tre}}$

2.9

a) 121_{seks} b) 221_{sju}

2.10

Her er hintet dessverre feil, da `hex()` er 16-tallsystemet. `oct()` gir oss tall i 8-tallsystemet. Men tilsvarende kunne man laget en kalkulator for 16-tallsystemet med å bruke `hex()`.

```
# skrive inn og addere to tall i åttetallsystemet
print("hvilke to tall i åttetallsystemet skal adderes, a og b?") #spør først etter to tall som skrives inn

a = input() #her defineres tall a
b = input() #her defineres tall b

print(a, "skal adderes med", b, "i åttetallsystemet")

# int(a, base=8) her beregner int hva a i åttetallsystemet er i ti-tallsystemet.
# int(b, base=8) her beregner int hva b i åttetallsystemet er i ti-tallsystemet.
# disse leddene adderes så med +
# oct () forteller at svaret skal være i åttetallsystemet

sum = oct(int(a, base=8) + int(b, base=8))

# Skrive ut svaret
print("svaret er", sum[2:], "i åttetallsystemet")

# om du bare skriver sum, ikke sum[2:], i siste linje, så printer python 0o foran svaret.
# 0o er pythons måte å si at man er i åttetallsystemet.
# 2: gjør at python printer det som står etter plass 2 i tallet, slik at vi slipper 0o
```

2.12

c) Sannsynligvis addert 3 med 1 og fått 4, og 9 med 3 og fått 12, og så satt sammen de to svarene.

2.13

Første elev har gjort $39 + 1 = 40$, og må så trekke fra 1.
Andre elev har sett at $13 = 11 + 2$, som gjør stykket $39 + 11$ enklere.

2.19

41_{fem}

2.20

Du kan ikke veksle hundreren og trekke fra tohundre.

2.22

32 m^2

2.23

1100 kroner

2.25

a) 205_{seks} b) 55_{seks} c) 51_{seks} d) 245_{seks} e) 213_{seks}

2.26

a) 1001_{to} b) $\text{D6}_{\text{seksten}}$ c) $\text{1A1}_{\text{elleve}}$ d) 2121_{tre} e) 2_{ni}

2.27

a) 1010_{tre} b) $\text{1A1}_{\text{elleve}}$ c) $10\,112_{\text{tre}}$ d) $\text{26A}_{\text{elleve}}$

2.28

233_{seks}

2.30

I den franske algoritmen ser eleven at å trekke fra 9 fra 7 ikke går. Da legger eleven til en tier foran 7, men trekker samtidig fra en tier på tierplassen i form av at sifferet som skal trekkes fra, 2, blir lagt til 1. Dermed tar man $17 - 9 = 8$ og $4 - (1 + 2) = 1$.

2.32

a) 1269 b) 765 c) 7854 d) 8811 e) 4368

2.34

Multiplikasjonstabell for tretallsystemet:

$\mathbf{2}_{\text{tre}}$	2_{tre}	11_{tre}
$\mathbf{1}_{\text{tre}}$	1_{tre}	2_{tre}
·	$\mathbf{1}_{\text{tre}}$	$\mathbf{2}_{\text{tre}}$

a) 222_{tre}

b) Multiplikasjonstabell for sekstallsystemet:

5$_{seks}$	5_{seks}	14_{seks}	23_{seks}	32_{seks}	41_{seks}
4$_{seks}$	4_{seks}	12_{seks}	20_{seks}	24_{seks}	32_{seks}
3$_{seks}$	3_{seks}	10_{seks}	13_{seks}	20_{seks}	23_{seks}
2$_{tre}$	2_{seks}	4_{seks}	10_{seks}	12_{seks}	14_{seks}
1$_{tre}$	1_{seks}	2_{seks}	3_{seks}	4_{seks}	5_{seks}
·	**1**$_{seks}$	**2**$_{seks}$	**3**$_{seks}$	**4**$_{seks}$	**5**$_{seks}$

2.35

a) 222_{fire} b) 110_{to} c) 1344_{fem}

2.36

2144_{fem}

2.38

Multiplikator er 4,2 og multiplikand er 3,3.

2.47

$37 \cdot 62 = 2294$

	60	2
30	1800	60
7	420	14

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r}1800\\420\end{array}\right\} & 2200 \\ \left.\begin{array}{r}60\\+\ 14\end{array}\right\} & 74 \\ \hline =2294 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} {}^{4}_{1} & \\ 37\cdot 62 & \\ \hline 74 & \leftarrow 60+14 \\ +\ 2220 & \leftarrow 1800+420 \\ \hline =2294 & \end{array}$$

2.48

$37 \cdot 62 = 37 \cdot (60 + 2) = 37 \cdot 60 + 37 \cdot 2 = 2220 + 74 = 2294$

2.50

a) $3413 : 7 = 487$ med 4 i rest b) $4218 : 13 = 324$ med 6 i rest

2.51

a) Henholdsvis 1 i rest og 2 i rest b) 497

2.53

a) Delingsdivisjon b) Målingsdivisjon c) Delingsdivisjon

2.55

125_{seks}

2.61

a) Henholdsvis 50, 500 og 5000. Vokser mot uendelig.

b) En mulig løsning er å lage en følge på denne måten:

```

folge=[5]     #skriver det første leddet i følgen

for i in range(1,15):     #lager ei løkke for de 14 neste leddene
    folge.append(5/((1/10))**i)     #beregner neste ledd

print("Følgen med 15 ledd er:",folge)     #skriver ut de 15 første leddene.
```

c) Henholdsvis 0, 0 og 0. Grensen går mot 0.

2.62

a) Kvotienten er 4 og resten er 3 **b)** Kvotienten er 18 og resten er 1

c) Kvotienten er 7 og resten er 0 **d)** Kvotienten er 7 og resten er 77

e) Kvotienten er 0 og resten er 0

2.63

a) 9 **b)** 77 **c)** 82

d) Dividend 50 rest 0, dividend 51 rest 1, dividend 52 rest 2, dividend 53 rest 3, dividend 54 rest 4

e) For eksempel 14, 22, 30 og uendelig mange flere løsninger

2.67

Vi kan legge merke til at i Norge skriver vi resultatene av multiplikasjonene på egne linjer, mens dette kuttes ut i Frankrike. I Frankrike har man minnetall, for å huske på det man gjør.

For eksempel ser man at 119 er like under 5 ganger 24. I Norge skriver vi opp 96, som er svaret på $4 \cdot 4$, og trekker dette fra 119, og får 23. Så trekker vi ned neste siffer.

I Frankrike gjøres multiplikasjonen samtidig med subtraksjonsstykket. Vi ser at vi må multiplisere 24 med 4 for å få noe som er mindre enn 119. Da kan vi ta $4 \cdot 4$, og får 16. Vi trekker 6 fra 9, og får 3, mens vi setter 1 som minnetall. Så tar vi $2 \cdot 4 = 8$, legger til minnetallet, som var 1, og får 9, og trekker dette fra 11, og får 2. Så trekker vi ned neste siffer, og har fått 230 som resultat. Så fortsetter vi.

Legg merke til hvorfor vi får 4 som minnetall akkurat her. Vi ser at $24 \cdot 9$ er det som blir mindre enn 230. Når vi tar $4 \cdot 9$ får vi 36, slik at vi egentlig skulle hatt 3 som minnetall. Men siden $0 - 6$ ikke går i algoritmen, må vi veksle en ekstra tier, og vi får $4 = 3 + 1$ som minnetall. Når vi så tar $2 \cdot 9 + 4 = 22$ og trekker dette fra 23 får vi 1.

2.68

Dette er en versjon av oppstykkingsdivisjon, hvor Lars først har delt ut 1, så 40 to ganger, og så 2. Han har en feil i siste linje, hvor man har fått $20 - 14$ til å bli 1, ikke 6. Svaret skal være 83 med 6 i rest.

2.69

```
 4824 : 6 = 804
−48
  02
 − 0
   24
  −24
    0
```

Elever trekker innimellom ned 24 i en operasjon, og vil dermed sannsynligvis miste 0 i svaret.

2.70

```
 4824 : 6 = 804
−2400       400
 2424
−   24        4
 2400
−2400       400
    0
```

En mulighet er å snakke med eleven om å slå sammen de to 400erne. Da ville man kunne skrevet:

```
 4824 : 6 = 804
−4800       800
   24
  − 0         0
   24
  −24         4
    0
```

Vi har også lagt til et ledd med 0 for å komme nærmere standardalgoritmen.
Da ser vi at venstresidene er like, med unntak av nuller som er tatt med eller tatt bort.

2.71

En mulighet er:

6098 : 7 =	871
700	100
5398	
49	7
5349	
49	7
5300	
490	70
4810	
4200	600
610	
490	70
120	
70	10
50	
49	7
1 i rest	

Her har man først tatt bort et passe stort tall (700). Så har man prøvd å dele ut 98 med å ta bort 49 i to runder, slik at man får et rundt tall. Så tok man bort 490, men da blir det en veksling som må gjøres. Tar så bort et stort tall igjen, og ser at 600 delt ut går bra. Sitter så igjen med 610. Greit å gi ut 70 fra dette, og har igjen 120. Gir så ut 10 siden dette er et greit tall, før man bruker at 7 gange 7 er 49, som er rett under 50.

Her finnes det mange alternative løsningsmåter.

2.72

a) 2000 **b)** -23 **c)** 5

2.73

a) $(130+90)\cdot(20-20)\cdot(40+80)=$

b) $(130+90)\cdot 20 - 20\cdot 40 + 20\cdot 80 = 4400 - 800 + 1600 =$

2.74

a) $(2+5)(7-13)+15:3=$ **b)** $2+5\cdot 7-13+15:3=$ **c)** $(2+5\cdot 7-13+15):3=$

2.75

a) $(2-2)\cdot\left(\frac{2}{2}-2\right)+\frac{2}{2}=$ **b)** $2-2\cdot\frac{2}{2}-2+\frac{2}{2}=$ **c)** $2-2\cdot\frac{2}{2}-2\cdot 2+\frac{2}{2}=$

2.76

a) -1 **b)** -2 **c)** 5 **d)** 8 **e)** 2

2.77

a) 2394 **b)** $a^2+a\cdot 11+7a+77=a^2+18a+77$

c) $a^2+2ab+b^2$ **d)** $(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2.78

a) 23 **b)** -10 **c)** 2 **d)** 10

2.79

$(a+b)(c+d)$ og $ac+ad+bc+bd$

2.81

$(a+c+d)(b+t+f)$ og $ab+at+af+cb+ct+cf+db+dt+df$ er to mulige uttrykk.

2.86

a) $|-6° - (-13°)| = |7°| = 7°$ b) $|26°| = 26°$ c) $|-15°| = 15°$

2.89

a) 440 kr b) 325 kr

2.92

a) 30 b) 20 c) 5

2.93

a) Er galt.

b) -1092 *Hint:* Bruk tom tallinje.

2.102

5

KAPITTEL

3

Brøk

3.1

a) 12,5 cm **b)** 180 kr **c)** 20 mil

3.2

$\frac{5}{6}$

3.3

$\frac{8}{3}$

3.6

Fordi et kvartal er 3 måneder, men månedene i året er ikke like lange.

3.7

$\frac{38}{7}, \quad \frac{64}{5}, \quad \frac{233}{66}$

3.8

$7\frac{1}{6}, \quad 9\frac{5}{7}, \quad 2\frac{111}{123} = 2\frac{37}{41}$

3.11

$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

3.12

$\frac{2}{7} < \frac{3}{9} < \frac{2}{5} < \frac{7}{2}$

3.13

a) $\frac{4}{11} < \frac{3}{8}$ **b)** $\frac{23}{11} < \frac{37}{13}$

3.14

a) Noen mulige brøker er $\frac{21}{60}, \frac{22}{60}, \frac{29}{60}$

b) Noen mulige brøker er $\frac{241}{300}, \frac{242}{300}, \frac{249}{300}$

3.15

$-\frac{7}{2} < -\frac{3}{3} < -\frac{2}{5} < -\frac{3}{9} < -\frac{2}{7}$

3.16

En mulighet er $\frac{55}{120}$

3.17

En mulighet er $\frac{125}{130}$

3.18

$\frac{12}{32}$

3.20

$\frac{35}{60}$ min $+$ $\frac{43}{60}$ min $=$ $\frac{78}{60}$ min $=$ 1 t 18 min

3.21

$\frac{11}{7}$

3.22

$\frac{7}{10}$

3.23

$$119 = 7 \cdot 17$$
$$136 = 8 \cdot 17$$

Derfor blir

$$\frac{119}{136} = \frac{7}{8}$$

3.24

Ingenting om de startet med en hel kake.

3.25

Nei

3.26

Nei

3.29

$\frac{13}{12}$

3.31

$\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}$

3.33

$4\frac{1}{8}$

3.35

$\frac{2}{15}$

3.36

$\frac{1}{9}$

3.37

9

3.38

$\frac{28}{15} : 1$ eller $28 : 15$

3.39

$\frac{3}{5}$

3.40

$\frac{28}{15}$

3.42

$x = \frac{ad}{bc}$

3.43

$\frac{5}{2}$

3.44

$-\frac{1}{3}$

3.45

$\frac{22}{3}$

3.46

$\frac{144}{5}$

3.47

$\frac{49}{100}$

3.48

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **c)** $3\sqrt{3}$

3.49

$\frac{11}{28}$

3.50

$\frac{26}{21}$

3.51

$\frac{8}{21}$

3.53

a) $x + 19 = 11$ **b)** $7x = 19$ **c)** $x^2 = 15$

KAPITTEL 4

Desimaltall og prosent

4.1

a) $\dfrac{23}{100}$ b) $\dfrac{34\,579}{1000}$

4.3

a) 34 100 b) 239 200 c) 0,2392 d) 0,00034

4.4

a) 0,15 b) 0,28 c) 0,5625

4.9

$0{,}125, \quad 0{,}083\overline{3}, \quad 0{,}25, \quad 0{,}41\overline{6}$

4.10

a) 21,923 b) 46,10 c) 0,199

4.11

a) 123,2 b) 37,4421

4.12

$\dfrac{3}{9} < 0{,}37 < \dfrac{3}{8} < 0{,}38 < \dfrac{3}{7}$

4.13

$\dfrac{10}{110} < 0{,}11 < 0{,}111 < \dfrac{1}{9}$

4.14

$0{,}333 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{2}{3} < 0{,}667$

4.15

$17{,}5\,\dfrac{\text{kr}}{\text{kg}}$

4.17

a) 525 kroner og 240 kroner

b) 120 kroner i avslag fra 600 kroner, eller 112 kroner avslag fra 280 kroner

4.18

14,4 %

4.19
4500 kroner

4.20
24,3 %

4.21
0,03 % = 0,0003

4.22
600 kroner

4.23
600 kroner

4.24
640 kroner

4.25
5000 kroner

4.26
1500 kroner

4.27
a) $0,\overline{428571}$ b) $0,\overline{027}$ c) $0,\overline{0099}$

4.28
a) $\frac{53}{99}$ b) $\frac{271}{999}$ c) $\frac{364}{99}$

4.33
Total sum etter n år $= 5000 \cdot 1{,}06n$
Totalt kan du ta ut $5000 \cdot 1{,}06^5 = 6691{,}13$

4.34
Fra du var 25 år til du er 70 år:

$20\,000 \cdot 1{,}05^{45} = 179\,700$

Fra du var 60 år til du er 70 år:

$20\,000 \cdot 1{,}05^{10} = 32\,578$

Svaret er omtrentlig, og er avhengig av når på året beløpet blir spart, og tidspunkt i året man tar ut pensjon.

4.36
6 : 0,75

4.37
2,25 kg

4.41
Trude

4.42
Olav

4.43
Rette svar er $\frac{60}{24}$ (ikke forkortet), $\frac{5}{2}$, 2,5, $\frac{3{,}75}{1{,}5}$ (ikke forkortet)

4.45
$12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

4.46
Bjørn har rett

Hoderegning

5.1

a) 37	b) 59	c) 62	d) 81	e) 357	f) 887	g) 960	h) 7355

5.2

a) 40	b) 60	c) 300	d) 660	e) 2470

5.3

a) 403

5.4

a) 3,7	b) 5,9	c) 6,2	d) 8,1	e) 3,57	f) 8,87	g) 96	h) 73,55

5.6

a) 1109	b) 494

5.8

a) 2	b) 7	c) 9	
d) 7	e) 112	f) 19	Hint: Øk begge tallene med 3.
g) 14			

5.9

a) 99	b) 1089	c) 244	d) 56

5.10

a) 9,9	b) 10,89	c) 24,4	d) 5,6

5.11

a) 188,1	b) 197,01	c) 18,81	d) 0,99

5.12

a) −270,9	b) 108,9	c) 146,88	d) 158,678
e) −27,09	f) 14,688	g) 1,089	

5.13

a) 99	b) 135

5.15

a) 80	b) 240	c) 60	d) 360

5.16

a) 187	b) 204	c) 323
d) 384	e) 260	f) 868

5.17

a) 225 **b)** 625 **c)** 1225 **d)** 2025

e) Legg til 1 på det første sifferet i det ene tallet, og multipliser med det første sifferet i det andre tallet, og sett 25 etter.

f)
$$\begin{aligned}(10n+5)(10n+5) &= 100n^2 + 2\cdot 5\cdot 10n + 25\\ &= 100n^2 + 100n + 25\\ &= 100(n^2+n) + 25\\ &= 100\cdot n\cdot (n+1) + 25\end{aligned}$$

5.18

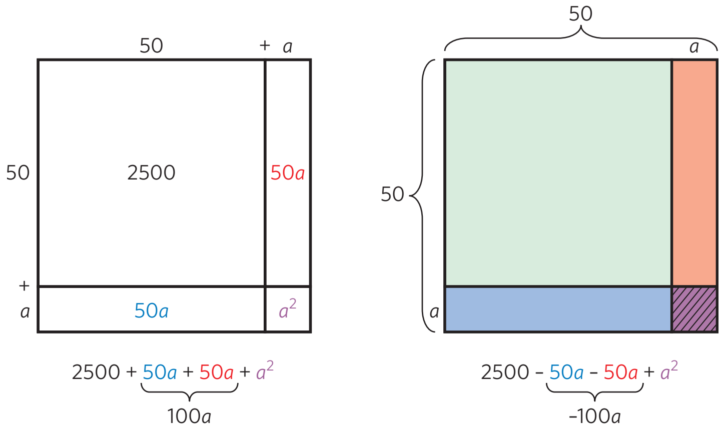
Algebraisk kan vi skrive opp det Hans gjør som

$$\begin{aligned}(50+a) &= 50^2 + 2\cdot 50\cdot a + a^2\\ &= 2500 + 100a + a^2\end{aligned} \qquad \text{(F.1)}$$

eller

$$\begin{aligned}(50-a) &= 50^2 - 2\cdot 50\cdot a + a^2\\ &= 2500 - 100a + a^2\end{aligned} \qquad \text{(F.2)}$$

For å illustrere dette geometrisk kan vi se på figuren under. Legg merke til at det feltet som er både rødt og blått er trukket fra to ganger, og dermed må det legges til igjen (lilla).



5.19

a) $(40+2)(40-2) = 1600 - 4 = 1596$

b) $(70-1)(70+1) = 4900 - 1 = 4899$

c) $(50+3)(50-3) = 2500 - 9 = 2491$

d) $(90-4)(90+4) = 8100 - 16 = 8084$

e) $(100-2)(100+2) = 10\,000 - 4 = 9996$

5.20

a) 60 **b)** 600 **c)** 4,4 **d)** 6,4 **e)** 5,6 **f)** 6600 **g)** 93 750

5.23

a) 16 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 33 **e)** 67 **f)** 89

5.24

a) 41 **b)** 99 **c)** 104 **d)** 103 **e)** 107 **f)** 207

5.25

a) 3,8 **b)** 74 **c)** 37 **d)** 18,5 **e)** 13,75 **f)** 6,875

5.26

a) $19{,}\overline{6}$ b) $9{,}8\overline{3}$ c) $7{,}\overline{8}$ d) $21{,}\overline{6}$ e) $8{,}\overline{142857}$ f) 17

5.28

a) $196{,}\overline{6}$ b) $98{,}\overline{3}$ c) 142 d) 130 e) $16{,}\overline{285714}$ f) 170

5.31

a) 6,3245 b) 8,8882 c) 5,9161 d) 10,954 e) 9,4868 f) 63,246

5.33

$\sqrt{8000} = 10 \cdot \sqrt{80} = 10 \cdot 8{,}944$

$\sqrt{800} = 10 \cdot \sqrt{8} = 10 \cdot 2{,}828$

$\sqrt{800\,000} = 100 \cdot \sqrt{80} = 894{,}4$

$\sqrt{80000} = 100 \cdot \sqrt{8} = 282{,}8$

5.34

La nærmeste kvadrattall til x være gitt av a^2. Da får vi

$$\sqrt{x} \approx \frac{x + a^2}{2\sqrt{a^2}} = \frac{x - a^2}{2a} + \frac{2a^2}{2a} = a + \frac{x - a^2}{2a}$$

der det siste leddet er korreksjonsleddet vi regner ut i likning (5.23).

5.35

a) 13 b) 5 c) 2000
d) 36 e) 80 386 f) 9537

5.36

a) 30 b) 6 c) 240 000 000
d) 1900 e) 160 000 f) 13 000

5.38

a) Nei b) Ja c) Ja d) Nei e) Ja

5.42

a) $20 \cdot 2$ b) 18 c) $63 : 6$

5.43

a) i) 201 ii) 4 b) i) Riktig ii) Feil

5.44

a) i) 1600 ii) 1600 iii) 10 000
b) i) 1596 ii) 1575 iii) 9919

Delelighet og faktorisering

6.3
Ja

6.4
Ja

6.5
b) Ikke nødvendigvis. $2 \cdot 3$ er et moteksempel.

6.7
Fordi hvis man hadde valgt samme variabel, ville de to oddetallene vært like.
Hvis de to variablene er like, beviser man: Hvis n er et oddetall, så er n^2 et oddetall.

6.8
Ja

6.9
Nei. $2/4$ er et moteksempel.

6.10
Hint: Et av tallene må være et partall.

6.11
Blir alltid et oddetall.

6.13
a) 2-rest **b)** 1-rest **c)** 2-rest

6.15
Vil få samme svar som i oppgave 6.13a, b, c.

6.18
a) Hvis du ikke er europeer, er du ikke nordmann.

b) Hvis a ikke er et rasjonalt tall, så kan det ikke være et naturlig tall.

6.21
$-21, 0, 21$

6.22
$-24, -12, 0, 12, 24$

6.23
$-20, -5, -4, -1, 1, 1, 20$

6.24

Alle tall på formen $-20 \cdot n$ der n er et naturlig tall eller 0.

6.27

a) 2_{tre} **b)** 2_{tre} **c)** 0_{tre} **d)** 2_{tre} **e)** 3_{fire}

6.30

Felles divisorer (faktorer) til 8 og 10 : 1 og 2. Felles multiplum av 8 og 10: 40, 80, 120, 160, ...
I tillegg kommer de tilsvaende negative tallene. $\text{SFF}(8, 10) = 2$ og -2 og $\text{MFM}(8, 10) = 40$ og -40.
Visualisering kan være henholdsvis å dekke et 8×10 rektangel med 2×2 kvadrater og å lage et kvadrat av 8×10 rektangulære fliser, sistnevnte kvadrat er 40×40. Kan også visualisere som i eksempel 30 på side 321.

6.31

$$\frac{7}{100}$$

6.32

Hvis du tilsvarende eksempel 30 (side 321 i hovedboka) legger 4 staver med lengde 10 etter hverandre og under det 10 staver med lengde 4, vil de to typene av staver måle opp samme heltallige lengde 2 ganger, for $5 \cdot 4 = 2 \cdot 10$.

6.33

Hint: 4 går opp i 12, så alle er i 12-gangen.

6.34

a) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, -1, -2, -3, -4, -6, -8, -12, -24

b) Dette blir alle kombinasjoner av tallene i a).

d) Gitt at du skal dele i minst to grupper og hver gruppe må ha minst 2 medlemmer, så har du muligheten til å velge enten 2, 3, 4, 6, 8 eller 12 grupper.
Gruppestørrelsen kan velges til 2, 3, 4, 6, 8 eller 12 elever.

6.36

-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

6.37

a) -42, -21, -14, -7, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42

b) $2 \cdot 3 \cdot 7$

c) $\text{SFF}(\pm 42, \pm 1) = \pm 1$, $\text{SFF}(\pm 42, \pm 2) = \pm 2$, $\text{SFF}(\pm 42, \pm 3) = \pm 3$, $\text{SFF}(\pm 42, \pm 6) = \pm 6$, $\text{SFF}(\pm 42, \pm 7) = \pm 7$, $\text{SFF}(\pm 42, \pm 14) = \pm 14$, $\text{SFF}(\pm 42, \pm 21) = \pm 21$, $\text{SFF}(\pm 21, \pm 2) = \pm 2$, $\text{SFF}(\pm 21, \pm 6) = \pm 3$, $\text{SFF}(\pm 21, \pm 14) = \pm 7$, $\text{SFF}(\pm 14, \pm 3) = \pm 3$, $\text{SFF}(\pm 14, \pm 6) = \pm 3$, $\text{SFF}(\pm 7, \pm 6) = \pm 1$

6.38

$a \cdot b = \text{SFF}(a, b) \cdot \text{MFM}(a, b)$

6.40

Hvis $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, så er $\text{SFF}\big(a, (\text{SFF}(b, c)\big) = \text{SFF}\big(\text{SFF}(a, b), c\big) = \text{SFF}\big(\text{SFF}(a, c), b\big)$

6.41

a) 8 **b)** -8 **c)** -8 **d)** -1

6.43

a) $$\frac{a^2 + ab^2}{ab} = \frac{a + b^2}{b} = \frac{a}{b} + b, \quad \text{for } a, b \neq 0 \tag{F.3}$$

b) $a \neq 0$, $b \neq 0$ (Nevner kan ikke være 0, da er oppgaven meningsløs.)

c) For a og b heltall ulik null.

6.45

a) 0 og $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ d) Nei f) Når $x \neq 0$

6.46

a) -6

6.47

a) -1, 2 d) Når denne faktoren er ulik 0.

6.48

$q = 1$, $r = 13$

6.50

45 045 (og $-45\,045$)

6.51

a) SFF: 21, MFM: 1890
b) SFF: 8, MFM: 138 736
c) SFF: 19, MFM: 1 062 347
d) SFF: 53, MFM: 1 178 190
e) SFF: 98, MFM: 15 931 370
f) SFF: 143, MFM: 331 486 441
g) SFF: 21, MFM: 50 540 490
h) SFF: 2021, MFM: 1 459 176 147
i) SFF: 1, MFM: 17 514 355 008 327

6.52

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{46}{377}$ c) $\frac{187}{299}$ d) $\frac{117}{190}$

e) $\frac{205}{793}$ f) $\frac{1333}{1739}$ g) $\frac{117}{20\,570}$ h) $\frac{459}{1573}$

i) Kan ikke forkortes.

6.55

$4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$,
$16 = 2^4$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $22 = 2 \cdot 11$

6.58

a) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

b) -15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15

c) -15 og 15 er største felles faktorer.

6.59

a) $3 \cdot 5 \cdot 7$ b) $3^2 \cdot 7^2$ c) $2 \cdot 3 \cdot 7^2$ d) $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ e) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ f) $7 \cdot 11 \cdot 13$

6.60

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73)

6.61

$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$
SFF(154, 165) = 11, MFM(154, 165) = 2310

6.62
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, $\text{SFF}(210, 165) = 15$, $\text{MFM}(210, 165) = 2310$

6.63
$$\frac{233}{2310}$$

6.64
$\text{SFF}(165, 1771) = 11$, $\dfrac{165}{1771} = \dfrac{15}{161}$

6.65
b, 0, Ja

6.66
121

6.68
$10\,800 = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2$, 60 divisorer

6.69
a) $225 = 3^2 \cdot 5^2$, divisorer: 1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225

b) $539 = 7^2 \cdot 11$, divisorer: 1, 7, 11, 49, 77, 539

c) $104 = 2^3 \cdot 13$, divisorer: 1, 2, 4, 8, 13, 26, 52, 104

6.70
2310

6.71
$4199 = 13 \cdot 17 \cdot 19$

6.72
547, 467 og 1301 er primtall

6.73
$1029 = 3^1 \cdot 7^3$

6.74
$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $99 = 3^2 \cdot 11$, $105 \cdot 99 = 10\,395$

6.76
a) Hun har ikke rett. Eksempel: $2 + 3$ er ikke et partall.

b) La p og q være to primtall slik at $p > 2$, $q > 2$. Da er $p + q$ et partall.

6.84
a) Ja **b)** Nei

6.85
Nei

6.87
55

6.88
Se oppgave 6.89.

6.97

a) 0 og 1 **b)** 0, 1 og 4

6.100

Ja

6.101

Nei. Moteksempel: $n = -6$

6.108

a) 1 **b)** 1 **c)** 1 **d)** 2

Kongruens

7.1

a) Eksempler er $-8, 4, 16, 28$

b) Eksempler er $-5, 7, 19, 31$

c) Eksempler er $-12, 0, 12, 24$

d) Eksempler er $-11, 6, 23, 40$

e) Eksempler er $-1, 4, 9, 14$

f) Eksempler er $-7, 0, 7, 14$

g) Eksempler er $-7, -3, 1, 5$

7.2

a) Eksempler er $-17, -5, 7, 19$

b) Eksempler er $-18, -6, 6, 18$

c) Eksempler er $-7, -3, 1, 5$

d) Eksempler er $-14, -3, 8, 19$

7.5

a) Eksempler er $4, 16$

b) Eksempler er $0, 12$

c) Eksempler er $1, 5$

d) Eksempler er $8, 20$

e) Eksempler er $-2, 5, 12$

7.7

Restklassen til $9 \pmod{12}$

7.8

a) Restklassen til $2 \pmod 7$

b) Restklassen til $2 \pmod 7$

c) Legg merke til at $-5 \equiv 2 \pmod 7$

d) $r = 2$

7.10

Begge tabellene er symmetriske om diagonalen som går fra øverst til venstre til nederst til høyre. Dette kommer fra kommutativ lov. Tabell 4 har også en symmetri om diagonalen som går fra $1 \cdot 6$ til $6 \cdot 1$. Dette er fordi $a \cdot b = (-a) \cdot (-b) \equiv (7 - a) \cdot (7 - b) \pmod 7$.

7.13

Tabell F.1 Multiplikasjonstabell modulo 12.

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Ja, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 har ingen multiplikativ invers. Dette er tall som har en felles faktor med 12 som er større enn 1.

7.15

a) 4 **b)** 4 **c)** 16 **d)** 4 **e)** 3 **f)** 63

7.16

8. Hint: $794 \cdot 31 \equiv 2 \cdot 4 \equiv 8 \pmod 9$

7.17

3

7.22

4

7.23

a) 23 **b)** 12 **c)** 12

7.24

a) 71 **b)** 15 **c)** 15

7.25

a) 6 **b)** 1 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

7.27

Har $754 = 700 + 50 + 4 = 2 \cdot 350 + 2 \cdot 25 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot 377$, så $t = 377$.

7.28

Nei

7.29

Har $15\,724 = 157 \cdot 100 + 24 = 157 \cdot 25 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = (157 + 6) \cdot 4$.
Et helt tall er delelig med 4 hvis tallet dannet av de to siste sifrene er delelig med 25, og bare da.

7.31

$A(7403) = 3 - 0 + 4 - 7 = 0$, som er delelig med 11, så tallet er delelig med 11.
$A(658) = 8 - 5 + 6 = 9$, som ikke er delelig med 11, så tallet er ikke delelig med 11.

7.34

Her er det flere muligheter. Den ene muligheten er å ta tverrsummen, og gjøre det på en litt effektiv måte ved å dele opp som

$$\begin{aligned} T &= 3 \cdot (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 3 \\ &= 3 \cdot 45 + 10 + 20 + 3 \\ &= 168 \end{aligned} \tag{F.4}$$

Tverrsummen av 168 er 15 som ikke er delelig på 9, og dermed er verken 168 eller tallet som ble gitt i oppgaven, delelig på 9. En annen og kanskje mer effektiv måte er å skrive tallet som følger

$$\begin{aligned} &123\,456\,789\,101\,112\,131\,415\,161\,718\,192\,021\,222\,324\,252\,627\,282\,930 \\ = &\; 1 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 0 \\ = &\; 1 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + 28 \cdot 10^4 + 29 \cdot 10^2 + 30 \\ = &\; 1 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + 28 \cdot (9999+1) + 29 \cdot (99+1) + 30 \end{aligned} \tag{F.5}$$

Siden tallene 99, 9999, osv. alle er delelig på 9, så ser vi at den delen av tallet som ikke er delelig på 9, er presis $1 + 2 + 3 + \ldots + 29 + 30$. Denne summen blir $\frac{30 \cdot 31}{2} = \frac{930}{2} = 465$, og tverrsummen av 465 er 15, som ikke er delelig på 9. Dermed er heller ikke 465 delelig på 9, og det lange tallet i oppgaven er dermed heller ikke delelig på 9.

7.35

$7515 - 2 \cdot 2 = 7511$. $751 - 2 \cdot 1 = 749$. $74 - 2 \cdot 9 = 56$. $5 - 2 \cdot 6 = -7$. Dette tallet er åpenbart delelig med 7. Vi kunne også stoppet ved 56, siden vi lett ser at det tallet ligger i sjugangen.

7.36

$$a \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 1^i \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \equiv T(a) \pmod 9$$

7.37

$$a \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot 10^i \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 10^i + a_0 \equiv \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot 0^i + a_0 \equiv a_0 \pmod 5$$

7.38

12

7.39

4

7.43

Indikerer galt svar

7.44

Kan med sikkerhet si at svaret er galt.

7.47

a) Indikerer rett svar
b) Indikerer rett svar
c) Indikerer rett svar
d) Indikerer rett svar

7.49

a) 2 streker, $x \equiv 2 \pmod{12}$

c) 5 streker. Har funnet ny løsning $x \equiv 5 \pmod{12}$

e) $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$

f) Når vi har kommet til $x > 12$.

7.50

a) Nei. Likningen har ingen løsning.

b) 3 streker. Da kommer du tilbake til 0 uten å ha vært innom 1.

c) Hvis $b \neq 0, 4, 8$ har likningen ingen løsning.

7.51

a) $x \equiv 9 \pmod{12}$

b) $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$

c) $x \equiv 100 \pmod{400}$

7.52

a) $x \equiv 0 \pmod{15}$, $x \equiv 3 \pmod{15}$, $x \equiv 6 \pmod{15}$, $x \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 12 \pmod{15}$

b) $x \equiv 1 \pmod{14}$, $x \equiv 3 \pmod{14}$, $x \equiv 5 \pmod{14}$, $x \equiv 7 \pmod{14}$, $x \equiv 9 \pmod{14}$, $x \equiv 11 \pmod{14}$, $x \equiv 13 \pmod{14}$

c) Ingen løsninger

7.53

200 meter

7.54

a) $8 \cdot 1 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 3 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 4 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 5 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 6 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 7 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 8 \equiv 4 \pmod{12}$, $8 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{12}$, $8 \cdot 10 \equiv 8 \pmod{12}$, $8 \cdot 11 \equiv 4 \pmod{12}$

b) $x \equiv 2 \pmod{12}$, $x \equiv 5 \pmod{12}$, $x \equiv 8 \pmod{12}$, $x \equiv 11 \pmod{12}$

c) Intet multiplikasjonsstykke i tabellen gir 1.

7.55

$x \equiv 4 \pmod{7}$

7.56

a) $x \equiv 3 \pmod{5}$

b) $x \equiv 8 \pmod{9}$

c) $x \equiv 6 \pmod{8}$

d) $x \equiv 11 \pmod{13}$

e) $x \equiv 0 \pmod{15}$, $x \equiv 3 \pmod{15}$, $x \equiv 6 \pmod{15}$, $x \equiv 9 \pmod{15}$, $x \equiv 12 \pmod{15}$

f) $x \equiv 4 \pmod{7}$

7.57

a) 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10. Alle nulldivisorene har en felles faktor større enn 1 med 12.

b) 1, 5, 7, 11. Multiplikative inverser modulo 12 har 1 som største felles faktor med 12.

c) Snitt: Den tomme mengde. Unionen: Alle tall mellom 0 og 12.

7.59

a) $2x \equiv 1 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$

b) $2x + 2 \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$

c) $11x \equiv 4 \pmod{13}$, $x \equiv 11 \pmod{13}$

d) $11x \equiv 4 \pmod{13}$, $x \equiv 11 \pmod{13}$

7.60

b) $x \equiv 2 \pmod{5}$. Fyll opp 3-liters bøtta og hell den oppi 5-liters bøtta.
Fyll opp 3-liters bøtta på nytt, og hell så mye som mulig opp i 5-liters bøtta.
Når 5-liters bøtta er full, heller du den ut, og beholder det som var igjen i 3-liters bøtta.
Dette er 1 liter.

c) La a og b være liter som er plass til i de to bøttene. La c være mengde vann som skal måles opp.
Hvis og bare hvis $\text{SFF}(a, b) \mid c$, kan den ønskede vannmengden måles opp.

7.61

4 grupper med 4 elever og 3 grupper med 5 elever.

7.62

$x_t = 3 - 7t$, $y_t = -2 + 5t$. Løsning ved $t = 0$: Fyll opp 5-liters bøtta en gang. Tøm den over i 7-liters bøtta. Fyll opp 5-liters bøtta en gang til. Hell over i 7-liters bøtta til den er full. Hell ut alt i 7-liters bøtta. Hell over resten fra 5-liters bøtta. Fyll opp 5-liters bøtta på nytt, og hell over i 7-liters bøtta til den er full. Tøm ut innholdet i 7-liters bøtta. Nå sitter du igjen med 1 liter vann i 5-liters bøtta. Du har altså fylt opp 5-liters bøtta 3 ganger og 7-liters bøtta -2 ganger (helt ut). Derfor er $x = 3$ og $y = 2$ et naturlig svar. Alternativt, sett $t = 1$. Da blir $x_1 = -4$, $y_1 = 3$. Da fyller du opp 3 sjuliters bøtter og heller ut 4 femliters bøtter.

7.63

a) $3x + 1y = 11$

Mulige løsninger: $x = 3, y = 2$ $\quad x = 2, y = 5$ $\quad x = 1, y = 8$ $\quad x = 0, y = 11$

7.64

80

7.65

a) $\text{SFF}(10, 24) = 2$

b) $x_t = -4 + 5t$, $y_t = 10 - 12t$ der t er et helt tall

c) Ja, fordi $\text{SFF}(10, 24) = 2$ vil det finnes to heltallsløsninger for hver gang x øker med 10.

7.66

a) $x_t = 7 + 38t$, $y_t = -51 - 277t$ der t er et helt tall. Ingen positive løsninger.

b) $x_t = 6 - 19t$, $y_t = 29 - 92t$ der t er et helt tall. Positive løsninger: Alle x_t, y_t der $t \leq 0$.

c) $x_t = 7 - 117t$, $y_t = 78 - 1304t$ der t er et helt tall. Positive løsninger: Alle x_t, y_t der $t \leq 0$.

d) $x_t = -11 + 78t$, $y_t = 210 - 1489t$ der t er et helt tall. Ingen positive løsninger.

e) Ingen løsninger eksisterer.

7.67

a) $x \equiv 226 \pmod{277}$

b) $y \equiv 1226 \pmod{1304}$

c) $x \equiv 210 \pmod{5956}$, $x \equiv 1699 \pmod{5956}$, $x \equiv 3188 \pmod{5956}$, $x \equiv 4677 \pmod{5956}$

7.68

Hint: $-15x + 21y = 133 = 7 \cdot 19$. $\text{SFF}(15, 21) \nmid 7 \cdot 19$
Finnes ikke heltallskoordinater.

7.69

a) Krav: $d \cdot \mathrm{SFF}(a, b) \mid bc$ samt $b \neq 0$, $d \neq 0$

7.70

a) $\mathrm{SFF}(a, b) = 1$

b) La $e = \min(a, b)$. Kravet er da at de diofantiske likningene $ax + by = d$ har en positiv løsning for alle d der $c \leq d < c + e$.

7.74

Eksempelvis $x = \dfrac{3}{5}$ og $y = \dfrac{4}{5}$.

7.76

2

KAPITTEL 8

Kryptografi

8.1

Det er ofte lett å bryte koder med bokstavforskyvning.

8.2

ymcqymcuww

8.8

a) Ja. Vi får henholdsvis 5 og 3 i rest.

b) Ja, for dette fødselsnummeret.

c) Ja. Vi får henholdsvis 8 og 9 i rest.

8.9

a) 5 **b)** 7

8.11

X betyr ti

8.14

a) $n = 55$

b) $\phi(55) = 40$, $d = 27$

c) Offentlig nøkkel: $n = 55$, $e = 3$
Privat nøkkel: $n = 55$, $d = 27$

d) $12^3 \equiv 23 \pmod{55}$

e) $23^{27} \equiv 12 \pmod{55}$

8.15

a) $\phi(33) = 20$, $\text{SFF}(7, 20) = 1$

b) 3 er en multiplikativ invers for 7 når vi regner modulo 20

c) $15^7 \equiv 27 \pmod{33}$

d) $27^3 \equiv 15 \pmod{33}$

KAPITTEL 9

Fibonacci-tallene

9.2

Forholdet går mot 0,61803398874989484820

9.3

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

9.8

Hint: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $-\dfrac{1}{\phi} = -\dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

9.9

a) $F_4 = 3$ **b)** $F_9 = 34$ **c)** $F_{11} = 89$

d) Leddet $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ vil bli svært lite for store n. Vi kan skrive $F_n \approx \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ for n stor.